Produit scalaire et produit vectoriel dans l'espace

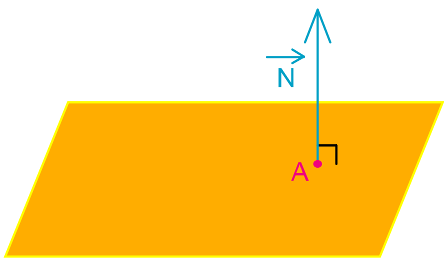
Soient A, B et C trois points quelconques de l'espace.

On a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos \widehat{BAC}$

Soient $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ une base orthonormée de l'espace et $\vec{u}\,(x,y,z)$, $\vec{v}\,(x',y',z')$ deux vecteurs de l'espace. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x\,x' + y\,y' + z\,z'$$

Le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{N}$, est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{N} = 0$

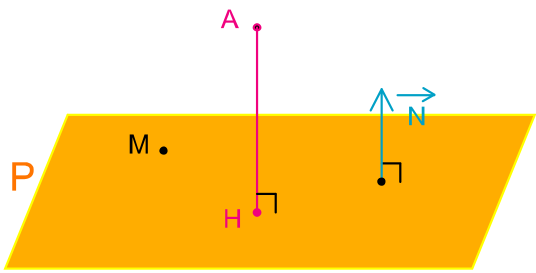


Soit le plan P d'équation : a x + b y + c z + d = 0 avec (a,b,c) ≠ (0,0,0).

Le vecteur $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

Soient le plan P : $a x + b y + c z + d = 0$,
$A\,(x_A, y_A, z_A)$ un point de l'espace et H le projeté orthogonal de A sur P.

Soit M un point de P et $\vec{N}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à P.

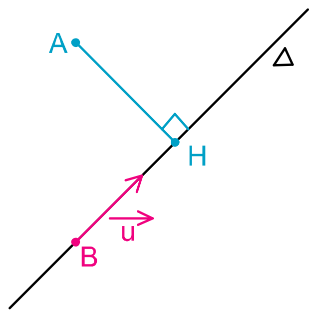


La distance du point A au plan P est le réel défini par :

$$d(A, P) = AH = \frac{\left|\vec{AM} \cdot \vec{N}\right|}{\left\|\vec{N}\right\|} = \frac{\left|a x_A + b y_A + c z_A + d\right|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(D) une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par B.
A un point de l'espace et H son projeté orthogonal sur (D).
La distance du point A à la droite (D) est le réel défini par : d(A, (D)) = AH.

$$AH = \frac{\left\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}.$$

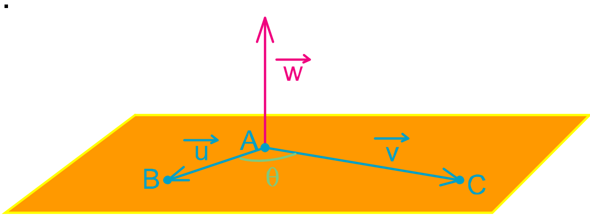


Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace orienté et A, B et C trois points tels que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{AC} = \vec{v}$. On appel produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ défini par :

* Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors $\vec{w} = \vec{0}$.
* Sinon alors

$$\begin{cases} 1/\ \ \vec{w} \text{ est normal au plan (ABC)} \\ 2/\ \ (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \text{ est une base directe} \\ 3/\ \ \|\vec{w}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin(\widehat{BAC}) \end{cases}$$



Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires de l'espace.

Soit θ une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.
On a :

$$\sin\theta = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}.$$

.

Dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$. On a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}.$$

$$= (yz' - zy')\,\vec{i} - (xz' - zx')\,\vec{j} + (xy' - yx')\,\vec{k}$$

Soit P un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur normal au plan P.

Soient A, B et C trois points de l'espace.
L'aire du triangle ABC est : $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|$.

Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est $\mathcal{V} = \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|$.

Le volume d'un un tétraèdre ABCD est $\mathcal{V} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right|$.